УДК 372.851

Учить логике будущих учителей математики (часть I)

В. И. Игошин

Игошин Владимир Иванович, доктор педагогических наук, профессор, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, igoshinvi@mail.ru

В статье обсуждается проблема формирования логических компетенций будущих учителей математики как на уровне бакалавриата, так и на уровне магистратуры. Логика рассматривается в трех аспектах – классическая аристотелевская логика, современная математическая логика и ее применение к аристотелевской логике, неклассические логики. Предлагается ряд мер, связанных с содержанием логической подготовки будущих учителей математики и направленных на совершенствование этой подготовки с целью повышения логической и общей профессиональной компетентности учителей математики, выпускаемых педагогическими и классическими университетами.

Ключевые слова: учитель математики, подготовка учителя математики, логическая компетентность будущих учителей математики, аристотелевская логика, математическая логика, неклассические логики.

DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2019-19-1-113-117

Введение

В статье Н. Х. Розова «Логика и школа» поднимается важная проблема математического образования школьников, напрямую и тесно связанная с подготовкой будущих учителей математики. Автор считает, что «нужно обеспечить целенаправленное ознакомление школьников с основными классическими универсальными законами мышления, добиваться, чтобы учащиеся их понимали и умели применять в своей деятельности. Однако наша школа фактически не уделяет внимания систематическому воспитанию логического мышления учащихся. В школе отсутствует целостный курс логики, и в этом один из печальных недостатков нашего среднего образования» [1, с. 143]. Далее автор утверждает, что «школьный курс математики ни в коей мере не покрывает общую логику мышления, а затрагивает лишь некоторые, весьма фрагментарные моменты ее специфической части – математической логики» [1, с. 144]. Следовательно, для того, «”чтобы привести ум в порядок”, математику изучать необходимо, но не достаточно». «Воспитание подлинной логической культуры должно быть отдано дисциплине “Логика”, содержащей основы науки, которая веками занималась этим» [1, с. 149].

Все же автор полностью не отрицает роли и значения курса математики в воспитании логического мышления учащихся: «Будем объективны: конечно же, школьная математика в определенном смысле действительно вносит свой вклад в развитие у учащихся умения рассуждать, делать правильные выводы, обосновывать утверждения. Ведь она неотделима от логических математических построений, подспудно опирается на “общелогические” законы. Но с сожалением заметим: это специально никогда явно не акцентируется, не объясняется и не развивается – ни на уроках, ни в учебниках. Увы, общелогические правила не обсуждаются даже тогда, когда в ходе математического доказательства появляется повод, возможность и даже необходимость о них поговорить специально». И вот здесь автор делает важнейший вывод: «Что, впрочем, не удивительно, ибо сами учителя математики с наукой “Логика” не знакомы» [1, с. 144].

Один из постулатов теории развивающего обучения гласит: обучение будет развивающим, если оно в сжатой, сокращенной форме воспроизводит действительный исторический процесс рождения и становления знаний. Что касается логики, то подобно тому, как арифметика возникла из потребности человечества считать, геометрия – измерять, так и логика была призвана решать еще одну практически важную для человечества задачу – исследовать процесс человеческого мышления.

Логика как наука началась с практического анализа мыслительного процесса, что гениально проделал ученик Платона Аристотель (384–322 гг. до Р.Х.), построив почти математическую модель этого процесса, которая более двух тысяч лет верой и правдой служила развитию всей последующей европейской научной цивилизации. Именно им впервые были выработаны научные представления об основных категориях логики – понятиях, суждениях и умозаключениях, даны характеристика и классификация суждений, доказано существование 19 типов правильных умозаключений специального вида, получивших название аристотелевских силлогизмов. На протяжении двух тысячелетий логика находилась в кругу идей и методов, очерченном Аристотелем. Эти идеи, методы и в настоящее время не утратили своего значения и представляют не только исторический интерес.

Еще в древнегреческие времена логика вошла в математику, превратив ее в логичнейшую из наук. «Со времен древних греков говорить “математика” – значит говорить “доказательство”» [2, с. 23].

Математика и логика на протяжении многих веков развиваются в теснейшем взаимодействии. Более того, это их взаимодействие собственно и обусловливает эффективное и поступательное развитие каждой из этих областей знаний, поочередно периодически вызывая кризис в каждой из них и затем способствуя его преодолению. Кризисы были связаны с тем, что накопленные к этому моменту математические результаты не укладывались в традиционно сложившиеся допустимые рамки способов рассуждений и представлений о порядке вещей. Для преодоления возникших трудностей приходилось коренным образом перерабатывать общие основы и методологию практически всех математических теорий и, конечно, анализировать логические методы рассуждений и доказательств, логические основания математической науки. Развивающаяся математика выдвигала все новые и новые критерии строгости математических доказательств, стимулируя логику к ее развитию. В то же время развивающаяся логика помогала математикам находить выходы из возникавших математических тупиков, куда они попадали, следуя по лабиринтам логических рассуждений.

С XIX в. древняя наука логика обретает второе рождение: в нее входит математика, причем математические методы внедряются в логику не просто по форме, но и по существу. Начиная с работ Дж. Буля, логическая модель мыслительного процесса, созданная Аристотелем, наполнилась математическим содержанием. В новом своем качестве логика, с одной стороны, применила математические методы для изучения общих структур (форм) правильного мышления и тем самым оформилась как раздел математики. С другой стороны, она сделала предметом своего изучения процесс доказательства математических теорем, сами математические теории. Логика, таким образом, становится полноправным разделом математической науки – математической логикой. Математическая логика получила в XX в. такие результаты о методах рассуждений в области математики, о которых традиционная логика не могла и помыслить: она обозначила границы применимости главенствовавшего на протяжении двадцати веков, со времен древнегреческой цивилизации, основного метода математики – аксиоматического метода. Эти результаты, полученные К. Геделем, А. Тьюрингом, А. Тарским, А. Черчем, без преувеличения можно считать важнейшими достижениями математической науки XX в.

Наконец, во второй половине XX в. обнаружились необычайной эффективности прикладные возможности, казалось бы, сугубо теоретической и абстрактной науки – математической логики, которая оказалась тесно связанной с компьютерами, во многом обязаными ей своим появлением и функционированием. При этом методы математической логики оказались необходимы в компьютерной практике, с одной стороны, при создании самих компьютеров (методы математической логики составили тот математический аппарат, который используется при конструировании переключательных схем – основных элементов компьютерного “железа”), а с другой стороны, при создании математического (программного) обеспечения к ним (в основе многочисленных языков программирования лежат различные так называемые логические исчисления). Кроме того, синтез логики и компьютеров привел к возникновению баз данных и экспертных систем – важнейших этапов на пути к созданию искусственного интеллекта – машинной модели человеческого разума.

Большие прикладные возможности математической логики привели к тому, что об основах логики современные учащиеся как на уровне высшего, так и на уровне среднего образования узнают из курса информатики, где логика представлена в своем математическом выражении, в котором они совершенно не видят логики как науки о мышлении, рассуждениях и доказательствах. Особенно пагубна эта ситуация в случае подготовки будущих учителей математики, которые как раз и призваны в будущей педагогической деятельности учить своих учеников рассуждать и доказывать, к чему призывает и Н. Х. Розов.

Однако прежде чем будущие учителя начнут знакомить школьников с основными классическими универсальными законами мышления, необходимо самих будущих учителей ознакомить с этими законами, и в первую очередь учителей математики, да и другим учителям-предметникам знание законов логики будет очень полезно. Еще Мефистофель наставлял Фауста:

«*Употребляйте с пользой время.*
Учиться надо по системе.
Сперва хочу вам в долг вменить
На курсы логики ходить.
Ваш ум, не тронутый доныне,

На них приучат к дисциплине.
Чтоб взял он направленья ось,
Не разбредаясь вкривь и вкось».

И. В. Гете. «Фауст»

Восполнению этого существенного методологического пробела в образовании будущих учителей математики (как на уровне бакалавриата, так и на уровне магистратуры), обучающихся на математических факультетах педагогических и классических университетов, – изучению традиционной науки логики с использованием методов современной математической логики – и призван послужить рассматриваемый курс логики.

Итак, педагогическая задача состоит в том, чтобы научить традиционной логике, «которая веками занималась воспитанием подлинной логической культуры», будущих учителей математики. Тем не менее все сказанное убеждает в том, что современная логика немыслима без ее математической составляющей, т. е. изучать в XXI в. логику без освоения хотя бы элементарных основ того, что дала ей математика, бессмысленно.

Традиционная логика с элементами математической логики

Фундаментом традиционной аристотелевской логики служит знаменитая аристотелевская триада категорий – понятие, суждение, умозаключение, характеризующая этапы мыслительного процесса и являющаяся методологической основой для построения математической модели процесса мышления, выражаемого на языке. При описании этих категорий с позиций математической логики используются два основных ее раздела – логика высказываний и логика предикатов [3–5]. Математизация начинается при изучении темы «Понятие», продолжается при прохождении темы «Суждение» и достигает наибольшей эффективности при изучении темы «Умозаключение».

Мыслительный процесс начинается с того, что предметы и явления окружающего мира мы называем некоторыми словами (терминами), обозначающими понятия, которые выделяют некоторый класс (множество) объектов посредством указания их признаков. Аристотель разработал теорию, как следует определять понятия и классифицировать их. Он ввел определения содержания и объема понятия и охарактеризовал классический способ его определения через ближайший род и видовые отличия. С точки зрения математической логики, признаки понятия представляют собой одноместные предикаты; совокупность признаков, составляющая его содержание, есть результирующий предикат, являющийся конъюнкцией этих предикатов; наконец, объем понятия есть множество истинности этого результирующего предиката. С этого момента для описания традиционной логики к математической логике подключается современная теория множеств. Таким образом, в понятиях обобщаются знания об отдельных предметах и явлениях окружающего мира.

Второй этап процесса мышления – установление связей (отношений) между предметами и явлениями окружающего мира и формулирование этих связей в форме суждений. Суждение, или высказывание, – это предложение, которое что-либо утверждает или отрицает о том или ином предмете или явлении и о котором можно судить, истинно оно или ложно. Наличие у предложения значения истинности есть то характеристическое свойство, которое выделяет высказывания из класса всех предложений языка. Таким образом, всякое высказывание либо *истинно*, либо *ложно*, третьего не дано. Каждому истинному суждению (высказыванию) ставится в соответствие символ 1, каждому ложному – 0. Таким образом, первый шаг на пути построения математической модели процесса мышления, выражаемого на языке, состоит в том, что мы отвлекаемся (абстрагируемся) от конкретного содержания суждений, а оставляем от каждого суждения лишь одну его характеристику – истинностное значение, т. е. приходим к двухэлементному множеству $\{0, 1\}$.

В сочинении «Об истолковании» Аристотель дал классификацию суждений по количеству (общее, частное, единичное) и качеству (утвердительное, отрицательное) и, кроме того, разделил суждения на простые и сложные. *Простое суждение* – такое, ни одна связная часть которого, в свою очередь, не является суждением. *Сложное суждение* имеет в своем составе другие суждения. Таким образом, в суждениях выражаются связи между понятиями.

С позиций математической логики сложные суждения устроены в определенном смысле проще, чем те, которые Аристотель назвал простыми. Это различие особенно ярко проявилось при анализе умозаключений с простыми и сложными суждениями. Сложные суждения моделируются первым разделом математической логики – логикой высказываний, простые – вторым ее разделом – логикой предикатов.

С точки зрения логики высказываний сложные суждения конструируются из простых с помощью языковых союзов «*не*», «*и*», «*или*», «*если … , то …*», «*тогда и только тогда*». Эти языковые действия над суждениями, обладающими теми или иными логическими значениями, приводят к новым суждениям, также имеющим какие-то логические значения, и тем самым порождают преобразования одних логических значений в другие. Каждое такое преобразование представляет собой алгебраическую операцию на двухэлементном множестве {0, 1} логических значений суждений.

Следующий шаг в построении математической модели процесса мышления, выражаемого на языке, состоит в том, чтобы понять, как устроена каждая такая операция, как она действует, т. е. точно определить эти операции. Операцию, порождаемую союзом «*не*», называют отрицанием (обозначение: ¬), союзом «*и*», – конъюнкцией (обозначение: ∧), союзом «*или*», – дизъюнкцией (обозначение: ∨), союзом «*если* … , *то* …», – импликацией (обозначение: →), союзом «*тогда и только тогда*», называют эквивалентностью (обозначение: ↔). Сами эти операции, называемые логическими, определяют с помощью соответствующих таблиц, называемых таблицами истинности. В итоге мы приходим к следующей алгебраической конструкции: двухэлементное множество {0, 1} с заданными на нем алгебраическими операциями – одной унарной ¬ и четырьмя бинарными ∧, ∨, →, ↔. Эта конструкция обозначается $\boldsymbol{B} = < \{0, 1\}; \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow >$ и представляет собой алгебраическую систему, называемую *алгеброй логики* (*алгеброй высказываний*, или *булевой алгеброй*).

Что касается простых суждений, то Аристотель выделил класс так называемых категорических (или атрибутивных) суждений, назвав ими суждения о свойствах предметов – отдельных предметов (единичные) и классов предметов (общие), подразделив их на утвердительные и отрицательные. Аппаратом математической логики, моделирующим такие суждения и их свойства, явилась логика предикатов.

Итак, на первых двух этапах мыслительного процесса – формирования понятий и формулирования суждений – человек, начиная действия от материального мира, переходит в область сознания.

Наконец, третий этап мыслительного процесса – умозаключение. В самом общем виде *умозаключение* представляет собой мыслительную операцию получения нового знания, выраженного в суждении, из других знаний, также выраженных в суждениях. Исходные суждения называют *посылками* умозаключения, а получаемое суждение – *заключением* или *следствием.* Таким образом, посредством умозаключений мы получаем приращение знаний, не обращаясь к исследованию предметов и явлений самой действительности, имеем возможность открывать такие связи и отношения действительности, которые невозможно увидеть непосредственно.

Аристотель первым обратил внимание на то, что в рассуждениях из одних суждений выводятся другие, исходя не из конкретного содержания суждений, а из определенной взаимосвязи между их формами, структурами. Вершиной теории умозаключений в традиционной логике явилась теория вывода, или доказательства, основой которой стала блестяще решенная Аристотелем задача описания всех правильных силлогизмов (их оказалось 19), т. е. общезначимых (универсальных для человеческого мышления) способов построения правильных умозаключений на основе категорических суждений. Математическая логика разработала общую теорию логического (дедуктивного) следования как для сложных, так и для простых суждений, в которую вошла составной частью и теория аристотелевских силлогизмов.

Таким образом, теория дедуктивных умозаключений – это апофеоз классической логики, ее вершина, поскольку в ней устанавливается порядок следования (выведения) суждений. В нахождении такого порядка в хаосе суждений и состоит высшее предназначение логики как науки. Здесь уместно вспомнить слова одного из основоположников кибернетики – американского математика Н. Винера: *«Высшее назначение математики как раз и состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает»* [6, с. 27].

Построенная математико-логическая модель позволяет изучать формы мышления, которые на языке этой модели выражаются так называемыми формулами логики высказываний и формулами логики предикатов. Мысль представляется высказыванием языка, а соответствующая ему формула математической логики выражает логическую форму этой мысли. Образно выражаясь, форма мысли – это то, что остается, если полностью абстрагироваться от конкретного ее содержания, сущностного многообразия отражаемого, оставив от мысли лишь ее форму. Таким образом, одну и ту же логическую форму могут иметь разные по содержанию мысли и это есть то общее, что они имеют. Изучение указанных форм и отношений между ними и составляет предмет логики как науки. В этом смысле логику называют формальной логикой, т. е. наукой о формах мыслей (подобно тому, как геометрию – наукой о пространственных формах предметов). Здесь можно, продолжая мысль Н. Винера, вспомнить, что логика призвана находить порядок в хаосе мыслей, который нас окружает, а также привести высказывание Д. Гильберта: *«Математика есть* *искусство называть разные вещи одним и тем же именем»*. При этом математическая логика в – двух своих разделах – логике высказываний и логике предикатов – предоставляет идеальный аппарат для такого исследования.

Продолжение следует

Список литературы

1. *Розов Н. Х.* Логика и школа // Наука и школа. 2016. № 1. С. 143–149.
2. *Бурбаки Н.* Теория множеств / пер. с фр. М., 1965. 456 с.
3. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М., 2004, 2008, 2010. 448 с.
4. *Игошин В. И.* Математическая логика : учеб. пособие. М., 2012. 399 с.
5. *Игошин В. И.* Элементы математической логики : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. М., 2016, 2017, 2018. 320 с.
6. *Винер Н.* Я – математик / пер. с англ. М., 1964. 336 с.

Образец для цитирования:

Игошин В. И. Учить логике будущих учителей математики (часть I) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. 2019. Т. 19, вып. 1. С. 113–117. DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2019-19-1-113-117

To Teach Logic to Prospective Mathematics Teachers (part I)

V. I. Igoshin

Vladimir I. Igoshin, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia, igoshinvi@mail.ru

The article discusses the problem of formation of logical competences of future mathematics teachers both at the undergraduate and graduate levels. In this case, the logic is considered in three aspects – classical Aristotelian logic, modern mathematical logic and its application to Aristotelian logic, non-classical logics. The author suggests a range of measures related to the content of logical training of future mathematics teachers at pedagogical and classical universities aimed at its improving and enhancing students' logical and general professional competence.

Keywords: teacher of mathematics, mathematics teacher training, logical competence of prospective mathematics teacher, Aristotle's logic, mathematical logic, non-classical logics.

References

1. Rozov N. Kh. Logic and School. *Nauka i shkola* [Science and School Journal], 2016, no. 1, pp. 143–149 (in Rissian).
2. Burbaki N. *Teoriya mnozhestv* [Theory of sets]. Transl. of fr. Moscow, 1965. 456 p. (in Rissian).
3. Igoshin V. I. *Matematicheskaya logika i teoriya algoritmov* [Mathematical logic and theory of algorithms]. Moscow, 2004, 2008, 2010. 448 p. (in Rissian).
4. Igoshin V. I. *Matematicheskaya logika* [Mathematical Logic]. Moscow, 2012. 399 p. (in Rissian).
5. Igoshin V. I. *Elementy matematicheskoy logiki* [Elements of Mathematical Logic]. Moscow, 2016, 2017, 2018. 320 p. (in Rissian).
6. Viner N. *Ya – matematik* [I am a mathematician]. Moscow, 1964. 336 p. (in Rissian).

Cite this article as:

Igoshin V. I. To Teach Logic to Prospective Mathematics Teachers (part I). *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Philosophy. Psychology. Pedagogy,* 2019, vol. 19, iss. 1, pp. 113–117. DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2019-19-1-113-117